

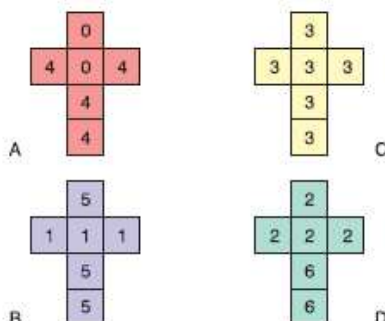
1.1.3 Material Efron und das Galton-Brett

Die folgende Aufgabe eignet sich zum Einstieg. Zum Spielen werden 4 Würfel benötigt, deren Flächen beschriftet werden sollen.

3 Die Reihenfolge entscheidet

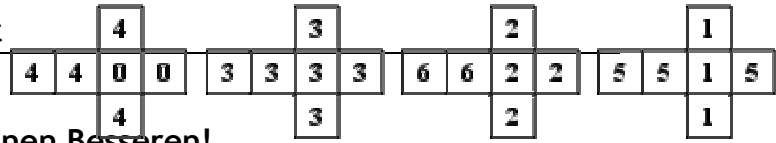
Die vier Würfel weisen auf ihren sechs Flächen die Augenzahlen wie in den abgebildeten Netzen auf. Christian darf sich zuerst einen der vier Würfel auswählen, anschließend darfst du aus den übrigen drei einen Würfel auswählen. Dann würfelt jeder, die höhere Augenzahl gewinnt. Ist Christian durch die erste Wahl dir gegenüber im Vorteil oder im Nachteil? Das Beispiel im Basiswissen gibt dir eine Hilfe: Wenn Christian den Würfel A wählt, nimmst du B. Deine Gewinnwahrscheinlichkeit ist dann $\frac{2}{3}$.

Kannst du bei jeder Wahl von Christian eine günstige Strategie finden? Begründe.



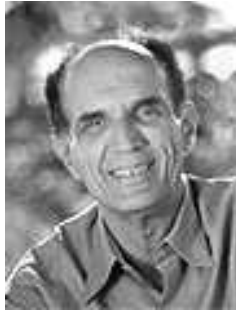
Quelle: Lergenmüller, A. und Schmidt, G. (Hrsg.): Mathematik -Neue Wege Band 9 - Arbeitsbuch für Gymnasien, Hannover, Schroedel 2003.

1.1.3 Material Efron und das Galton-Brett



Wie so oft im Leben: Es gibt immer einen Besseren!

Was dich erwartet



Bradley Efron ist Statistiker an der Stanford University, USA.

Die 4 „verrückten“ Würfel von Bradley Efron haben es in sich! Wenn der Gegner einen Würfel zuerst auswählt und man dann seine Wahl für den zweiten Würfel treffen darf, hat man sehr gute Chancen beim 11-fachen Wurf zu gewinnen. Wir wollen der Frage nachgehen, warum das so ist...

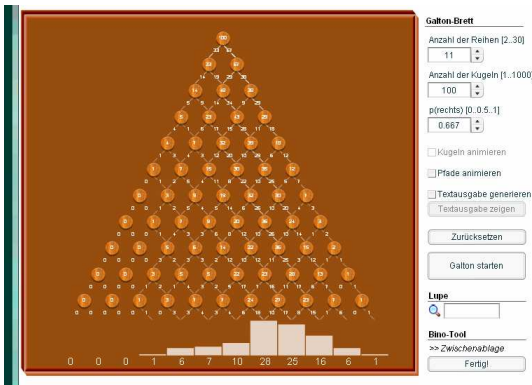
Die folgende Übersicht zeigt die Gewinnmöglichkeiten beim Spiel mit den beiden Würfeln A (2 2 2 2 6 6) und B (1 1 1 5 5 5) an.

	1	1	1	5	5	5
	A	A	A	B	B	B
2	A	A	A	B	B	B
2	A	A	A	B	B	B
2	A	A	A	B	B	B
6	A	A	A	A	A	A
6	A	A	A	A	A	A

Aufträge:

- In wie vielen Fällen gewinnt der Würfel A (2 2 2 2 6 6) gegen B (1 1 1 5 5 5)?
- Entwerfe auch für die anderen Würfelpaare eine solche Gewinn-Übersicht. Was stellst du fest?
- Jonas spielt mit dem Würfel A gegen den Würfel B 11 mal. Wer am Ende 6 oder mehr Spiele gewonnen hat, gewinnt die Partie. Schätze seine Gewinnchancen! Folgende Partie wurden gespielt-gib an wer gewonnen hat: AABBBBBBAAAB

- Modelliere Jonas Spiel mit dem Galton-Brett:
Fragen zur Umsetzung:
Wie muss die Wahrscheinlichkeit p gewählt werden?
Wie viele Stufen braucht das Galton-Brett?
Wie viele Kugeln lasse ich durchrollen?



- Das Binotool liefert für 100 Kugeln die Ergebnisse → Wie werden die Ergebnisse für 1000 Kugeln wohl aussehen? Mache einen Vorschlag und Überprüfe!
- Wer hat recht? Begründe deine Entscheidungen!

Fach	Kugelanzahl
0	0
1	0
2	0
3	1
4	3
5	8
6	17
7	24
8	24
9	16
10	6
11	1
Summe	100

Frida: „Die Tabelle zeigt es: Meine Gewinnchancen betragen nur ungefähr 17% - ich lasse es besser!“

Clara: „Ich verliere nur in 12 von 100 Fällen. Das macht eine Gewinnchance von ca. 88% - ich kann ruhig spielen.“

Moritz: „Ich gewinne die Partie mit 6 oder mehr gewonnenen Spielen. Um meine Chancen zu finden, muss ich alle gewonnenen Spiele zusammenrechnen!“

1.1.3 Material Efron und das Galton-Brett

Galton-Brett, Baumdiagramme und die Efron-Würfel

Glossar:

Bernoulli-Experiment

Bei der Durchführung vieler Experimente kommt es nur darauf an, ob ein gewisses Ereignis A („Treffer“) eingetreten ist oder dessen Gegenereignis \bar{A} („Niete“). Solche Experimente heißen **Bernoulli-Experimente**.

Beispiele

Zufallsexperiment	Ereignis A	Gegenereignis \bar{A}
Werfen einer Münze	Kopf	Zahl
Endkontrolle von Geräten	Gerät intakt	Gerät defekt
Wählerverhalten einer Bevölkerungsgruppe in Bezug auf Partei G	Befragter will Partei G wählen.	Befragter will Partei G nicht wählen.
Lauf einer Kugel im Galton-Brett	Kugel in Kästchen 2	Kugel nicht in Kästchen 2

Bernoulli-Kette

Ein Bernoulli-Experiment werde n mal nacheinander so durchgeführt, dass die Wahrscheinlichkeiten für „Treffer“ und „Niete“ bei jeder Durchführung gleich sind, gleichgültig welche Folge von Treffern und Nieten vorausgegangen ist. Das so entstehende n -stufige Experiment heißt **Bernoulli-Kette** der Länge n .

Beispiel

mehrmaliger Münzwurf, Treffer: Kopf, Niete: Zahl

→ Beschreibe: Wie lässt sich das Spiel mit zwei Efron-Würfeln als **Bernoulli-Experiment** deuten? Was heißt „Niete“, was „Treffer“?

→Wie lässt sich das Spiel mit zwei Efron-Würfeln als **Bernoulli-Kette** deuten?

Binomialverteilung

Ist n die Länge einer Bernoullikette, p die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer, $P(X=k)$ die Wahrscheinlichkeit für k Treffer, so gilt:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \text{ für } k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$$

Man sagt, die Trefferzahl bei einer Bernoullikette ist **binomialverteilt** (nach der Bezeichnung: Binomialkoeffizient für $\binom{n}{k}$).

Eine Zufallsgröße X , die ihre Werte $0, 1, 2, 3, \dots, n$ mit den Wahrscheinlichkeiten

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \text{ für } k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$$

annimmt, heißt binomialverteilt.

Man nennt p und n die Parameter der **Binomialverteilung**.

Quelle: Lergenmüller, A. und Schmidt, G. (Hrsg.): Mathematik -Neue Wege Band 9 - Arbeitsbuch für Gymnasien, Hannover, Schroedel 2003.

Beispiel Gewinn der Partie mit genau 6 gewonnenen Spielen

$$P(\text{genau 6 gewonnene Spiele}) = P(X = 6) = \binom{11}{6} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5$$

$$P(\text{gewonnene Partie}) = P(X=6)+P(X=7)+P(X=8)+\dots+P(X=10)+P(X=11)$$

$$\text{Zahl der Pfade, die zum 6. Topf führen: } \binom{11}{6} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{11 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7}{1} = 462$$

Zwei der 462 Pfade haben wir angegeben: (G Gewinn - V Verlust)

GGGVVVVGGG

VVGVGGGVVG

$$\text{Wahrscheinlichkeit eines dieser Pfade: } \left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 \approx 0,036\%$$

$$P(\text{genau 6 gewonnene Spiele}) = P(X = 6) = \binom{11}{6} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 \approx 16,7\%$$

Weitere Aufträge

→ Gib drei weitere Pfade an, die dazu führen, dass das Spiel mit genau 6 gewonnenen Spielen endet!

→ Berechne die Zahl der Pfade, die im Topf 7 landen! Schätze zuerst: Sind es mehr oder weniger Pfade?

→ Zurück zu Efron: Interpretiere die Zahl der Pfade, die in Topf 7 landen, bzgl. des Würfelspieles!

→ Welche Wahrscheinlichkeit wird mit folgendem Ausdruck berechnet?

$$\binom{11}{10} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \binom{11}{11} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{11}$$

Alles klar?

→ Schreibe einen mathematischen Aufsatz, der folgende Kapitelüberschriften trägt:

Ein seltsames Spiel: Die Würfel des Herrn Efron

Wir lüften das Geheimnis: Die Würfel systematisch untersucht

Wir treiben Mathematik: Untersuchung der Efron-Würfel mithilfe des Galton-Bretts

Meine persönliche Einschätzung